一个关于 Smarandache函数的方程

朱晓艳, 高　丽

(延安大学 数学与计算机学院, 陕西 延安 716000)

摘　要: 先给出伪 Smarandache函数 $Z(n)$的定义, 并利用了初等方法讨论了级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}$的收敛性质, 得出了一个有趣的恒等式。对任意的实数 $\alpha\leqslant 1$, 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}$发散, 当 $\alpha>1$时, 这个级数发散, 且有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}=\xi(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2m(m+1-1)}{m^{2}(m+1)^{2\alpha}}$。

关键词: 伪 Smarandache函数; Riemann zeta-函数; 收敛性

中图分类号: O156.4　　文献标识码: A　　文章编号: 1004-602X(2009)02-0005-02

1　引言及结论

对于任意的正整数 n, 伪 Smarandache函数 $Z(n)$定义为最大的正整数 m使得 $1+2+3+\cdots+m$整除 n, 即就是

$$Z(n)=\max\left\{m: m\in N, \frac{m(m+1)}{2}\mid n\right\}。$$

1737年, Euler证明: 由 $\xi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$, 对实数 $s>1$, 给定的 Zeta函数 $\xi(s)\to\infty$ (当 $s\to 1$时)。

本文利用了初等方法讨论了级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}$的收敛性质, 并给出了一个有趣的恒等式。

定理: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}=\zeta(\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{m}}{m^{\alpha}(m+1)^{2\alpha}}$

推论: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}=\frac{\pi^{2}}{6}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m(m+1)^{4}}$

2　给出引理

为了完成定理的证明, 先引入引理。

对任意正整数 n, 著名的 Smarandache函数 $S(n)$定义为使 $n\mid m!$ 的最小的正整数 m, 即 $S(n)=\min\{m: n\mid m!\}$。

类似地我们介绍另一个与 Smarandache函数相关的函数, 称其为 Smarandache对偶函数 $S^{*}(n)$, 它表示使 $n\mid m!$ 的最小正整数 m, 其中的 n为任意的正整数, 即 $S^{*}(n)=\max\{m: m!\mid n\}$。

引理: 对任意的实数 $\alpha\leqslant 1$, 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{*}(n)}{n^{\alpha}}$发散, 当 $\alpha>1$时, 这个级数收敛, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{*}(n)}{n^{\alpha}}=\zeta(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^{\alpha}},$$

其中 $\zeta(s)$是 Riemann Zeta-函数。

3　定理的证明

对任意的实数 $\alpha\leqslant 1$, 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}$发散, 当 $\alpha>1$时这个级数收敛, 且有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}=\zeta(\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{m}}{m^{\alpha}(m+1)^{2\alpha}}$

其中 ζ是 Riemann zeta-函数。

证明: 对任意的实数 $\alpha\leqslant 1$, 我们可得 $Z(n)\geqslant 1$和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}$发散, 所以当 $\alpha\leqslant 1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}$也发散。

收稿日期: 2008-09-21

基金项目: 陕西省教育厅专项科研项目(07JK430)

作者简介: 朱晓艳(1983—), 女, 陕西渭南人, 延安大学硕士研究生。

对任意的正整数 $l\geq 1$，一定存在一个正整数 m 使得 $n=m$。成立，所以对任意 $\alpha>1$，由 $Z(n)$函数的定义

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\substack{m=1\\ m+1\nmid l}}^{\infty}\frac{m}{\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\alpha}l^{\alpha}}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{l=1\\ m+1\nmid l}}^{\infty}\frac{m}{\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\alpha}l^{\alpha}}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\alpha}}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{\alpha}}-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^{\alpha}l^{\alpha}}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\alpha}}\zeta(\alpha)\left(1-\frac{1}{(m+1)^{\alpha}}\right)$$

$$=\zeta(\alpha)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\alpha}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{(m+1)^{\alpha}}\right)$$

$$=\zeta(\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m((m+1)^{\alpha}-1)}{m^{\alpha}(m+1)^{2\alpha}}$$

在定理中取 $\alpha=2$我们立刻可得如下推论：

推论：对于伪 Smarandache函数，有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{2}}=\zeta(2)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m((m+1)^{2}-1)}{m^{2}(m+1)^{4}}$$

$$=\frac{\pi^{2}}{6}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m((m+1)^{2}-1)}{m^{2}(m+1)^{4}}$$

$$=\frac{\pi^{2}}{6}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(m^{2}+2m)}{m(m+1)^{4}}$$

参考文献：

[1] 徐哲峰. Smarandache函数的值分布性质[J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1019－1012.

[2] Ma Jinping. The Smarandache multiplicative function[J]. Scientia magna, 2006, 1(1): 103－107.

[3] Smarandache F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: xiquan Publishing House, 1993.

[4] Le M H. A conjecture concerning the smarandache dual function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004(14): 153－155.

[5] Smarandache F. A function in the number theory[J]. Ann. Timisoara Univ. Ser. Math., 1980, 28(1): 79－88.

[6] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.

[责任编辑　贺小林]

An Equation Involving Smarandache Function

ZHU Xiao-yan, GAO LI

(College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan 716000, China)

Abstract: The main purpose of this paper is using the elementary methods to study the converge of the base $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z(n)}{n^{\alpha}}$, then give an interesting equal formula.

Key words: pseudo; Smarandache function; Riemann zeta-function; converge